УДК 338.27

**ВЗАИМОСВЯЗЬ ЭКОНОМЕТРИЧЕСКИХ МЕТОДОВ ОЦЕНКИ
ПАРАМЕТРОВ СИСТЕМ ОДНОВРЕМЕННЫХ УРАВНЕНИЙ****Бабешко Л.О.***ФГОБУ ВО «Финансовый университет при Правительстве РФ», Москва, e-mail: LBabeshko@fa.ru*

Статья посвящена эконометрическим методам оценки параметров систем одновременных уравнений (СОУ). СОУ чаще остальных систем используется в эконометрических исследованиях для моделирования функционирования сложных экономических объектов, в которых изменения одних переменных не могут происходить при абсолютной неизменности других. Проблема оценки параметров СОУ связана с эндогенностью отдельных переменных, которые в одних уравнениях системы взаимосвязанных уравнений являются эндогенными, а в других – регрессорами. Эндогенность регрессоров приводит к смещению точечных оценок параметров структурной формы спецификации модели, представляющей наибольший практический интерес. Поэтому для оценки параметров СОУ разработаны специальные методы, обогащающие эконометрический инструментарий: косвенный метод наименьших квадратов (КМНК), двухшаговый метод наименьших квадратов (ДМНК), трехшаговый метод наименьших квадратов (ТМНК), метод инструментальных переменных (МИП), которые позволяют решить проблему эндогенности переменных, возникающую при оценке структурных параметров системы. В статье анализируется взаимосвязь методов оценки параметров СОУ: КМНК и ДМНК; МИП и ДМНК; ДМНК и МНК с ограничениями на структурные параметры. Эквивалентность результатов оценивания структурных параметров модели, в рамках обсуждаемых методов, продемонстрирована на эмпирическом примере.

Ключевые слова: система одновременных уравнений, косвенный метод наименьших квадратов, двухшаговый метод наименьших квадратов, трехшаговый метод наименьших квадратов, метод инструментальных переменных, ограничения на параметры

**INTERRELATION OF ECONOMETRIC METHODS FOR THE EVALUATION
OF SYSTEMS OF SIMULTANEOUS EQUATIONS****Babeshko L.O.***The Financial University under the Government of the Russian Federation, Moscow,
e-mail: LBabeshko@fa.ru*

The article is devoted to econometric methods for estimating the parameters of simultaneous equations (SDA) systems. SOU more often than other systems is used in econometric studies to model the functioning of complex economic objects in which changes in some variables can not occur with the absolute immutability of others. The problem of estimating the SDA parameters is related to the endogeneity of individual variables, which in some equations of a system of interdependent equations are endogenous, and in others – regressors. The endogeneity of the regressors leads to a shift in the point estimates of the parameters of the structural form of the model specification, which is of greatest practical interest. Therefore, to evaluate the parameters of the SDA, special methods have been developed that enrich the econometric tools: the indirect least-squares method, the two-step least-squares method, the three-step least-squares method, the method of tool variables. To solve the problem of endogeneity of variables arising in the evaluation of structural parameters of the system. The article analyzes the interrelation between the methods for estimating the SDA parameters: CIOC and DMNC; IIP and DMSA; DNPC and MNC with constraints on structural parameters. The equivalence of the results of estimating the structural parameters of the model, in the framework of the methods discussed, is demonstrated in an empirical example.

Keywords: system of simultaneous equations, indirect least-squares method, two-stage least squares method, three-stage least squares method, instrumental variables method, parameter constraints

Основная цель эконометрического моделирования – изучение взаимосвязей между переменными, описывающими экономические объекты. При моделировании простых экономических объектов используются отдельные изолированные уравнения парной или множественной регрессии. Для описания сложных экономических систем, включающих несколько экономических объектов, используются не отдельные уравнения, которых недостаточно для объяснения их функционирования, а системы уравнений. Возникает необходимость оценивания систем уравнений. Для этой цели в эконометрике разработаны специальные методы исследования и оценивания. Методы оце-

нивания зависят от типа системы уравнений. Если исследуемая система включает независимые уравнения (*система независимых уравнений*), то каждое уравнение может рассматриваться самостоятельно, и для оценки его параметров, при условии выполнения всех предпосылок Гаусса – Маркова, можно использовать обычный метод наименьших квадратов (МНК, *ordinary least squares method, OLS*), при гетероскедастичном возмущении – метод взвешенных наименьших квадратов (*weighted least squares method, WLS*), при гетероскедастичности и/или автокорреляции – обобщенный метод наименьших квадратов (ОМНК, *generalized least squares method, GLS*) [1].

Таблица 1

Данные за последовательные 11 лет

t	Y_1	Y_2	Y_3	X_1	X_2	t	Y_1	Y_2	Y_3	X_1	X_2
1	46	3,4	24	2,3	1,0	7	57	3,9	28	3,4	1,1
2	48	3,4	25	2,4	1,1	8	59	4,0	29	3,4	1,3
3	49	3,5	25	3,2	1,1	9	59	4,3	31	3,5	1,5
4	52	3,7	26	3,4	1,0	10	60	4,5	33	3,5	1,6
5	52	3,8	27	3,4	1,1	11	61	4,8	35	3,6	1,7
6	54	3,8	27	3,4	1,2						

Если взаимосвязь уравнений объясняется только корреляцией их случайных возмущений (влиянием «одной экономической среды» на формирование переменных уравнения), то такая система называется *системой внешне не связанных уравнений* (*Seemingly Unrelated Regression, SUR*). Оценка параметров *SUR* выполняется в рамках обобщенного метода наименьших квадратов (ОМНК), применяемого к специальным образом составленной спецификации модели [2].

Если система состоит из набора взаимосвязанных уравнений, и одни и те же переменные в одних уравнениях являются эндогенными, а в других – регрессорами, то такие системы называют *системами одновременных уравнений*, *COU* (*Simultaneous equations*). *COU* чаще остальных систем используется в эконометрических исследованиях. Для оценки параметров *COU* используются: косвенный метод наименьших квадратов (КМНК, *indirect least squares method, ILS*), двухшаговый метод наименьших квадратов (ДМНК, *two stage least squares method, 2SLS*), которые позволяют решить проблему эндогенности переменных, возникающую при оценке структурных параметров системы. Повысить точность ДМНК-оценок структурных параметров можно в рамках трёхшагового метода наименьших квадратов (ТМНК, *three stage least squares method, 3SLS*), учитывающего взаимодействие уравнений в системе [3]. Рассмотрим методы оценки параметров *COU* на примере следующей модели [4]:

$$\begin{aligned} Y_1 &= a_{10} + a_{12}Y_2 + b_{11}X_1 + v_1, \\ Y_2 &= a_{20} + a_{23}Y_3 + v_2, \\ Y_3 &= a_{30} + a_{32}Y_2 + b_{32}X_2 + v_3. \end{aligned} \quad (1)$$

Вектор эндогенных переменных системы (1) включает элементы: Y_1 – объем продукции (в тыс. штук); Y_2 – количество работающих (в тыс. человек); Y_3 – стоимость основных фондов (в млн złotych), вектор экзогенных переменных: X_1 – использованное сырьё (в тыс. тонн); X_2 – инвестиции (в млн złotych). Данные за 11 лет приведены в табл. 1.

Проблема эндогенности регрессоров структурной формы спецификации (1) приводит к смещению МНК-оценок параметров модели. Поэтому для оценки параметров используются косвенный метод наименьших квадратов (КМНК) – для точно идентифицируемых уравнений модели, и двухшаговый метод наименьших квадратов (ДМНК) – для идентифицируемых уравнений. КМНК-оценки параметров точно идентифицируемых уравнений совпадают с ДМНК-оценками [5].

Косвенный метод наименьших квадратов. Алгоритм КМНК состоит из следующих шагов [6]:

1. По структурной форме модели

$$A \cdot Y_t + B \cdot X_t = V_t, \quad (2)$$

где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2k} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mk} \end{pmatrix}$$

– матрицы структурных параметров, $Y_t = (Y_{1t}, Y_{2t}, \dots, Y_{mt})^T$ – вектор-столбец значений эндогенных переменных, $X_t = (X_{1t}, X_{2t}, \dots, X_{kt})^T$ – вектор-столбец значений предопределенных переменных, которые могут включать как экзогенные переменные (внешние по отношению к системе), так и лаговые значения эндогенных переменных, $V_t = (v_{1t}, v_{2t}, \dots, v_{mt})^T$ – вектор-столбец случайных возмущений, t – номер наблюдения, строится приведенная форма (значком « T » обозначена операция транспонирования):

$$Y_t = -A^{-1}BX_t + A^{-1}V_t = MX_t + U_t, \quad (3)$$

где

$$M = -A^{-1}B \quad (4)$$

– матрица коэффициентов приведенной формы,

$$U_t = A^{-1}V_t$$

– вектор случайных возмущений приведенной формы.

2. Определяются МНК-оценки параметров приведенной формы (3).

3. По МНК-оценкам приведенной формы вычисляются оценки параметров структурной формы (2).

Для оценки структурных параметров по приведенным, на третьем шаге, используется уравнение взаимосвязи структурных и приведенных параметров (4):

$$AM + B = 0,$$

которое можно записать через расширенную матрицу $\bar{A} = (A|B)$ структурной формы

$$\bar{A} \cdot \begin{pmatrix} M \\ I \end{pmatrix} = 0, \quad (5)$$

где I – единичная матрица $k \times k$, где k – число предопределенных переменных в системе. Если значения элементов матрицы M приведенной формы неизвестны, то в системе (5) используются их МНК-оценки. Расширенная матрица структурных параметров для модели (1) имеет вид

$$\bar{A} = (A|B) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -a_{12} & 0 & -a_{10} & -b_{11} & 0 \\ 0 & 1 & -a_{23} & -a_{20} & 0 & 0 \\ 0 & -a_{32} & 1 & -a_{30} & 0 & -b_{32} \end{array} \right). \quad (6)$$

Первое и третье уравнения системы (1) точно идентифицируемы, поэтому для них применим КМНК. Рассмотрим первое уравнение структурной формы. Его параметры, с учетом (6), удовлетворяют системе линейных уравнений (5)

$$(1 \quad -a_{12} \quad 0 \quad -a_{10} \quad -b_{11} \quad 0) \cdot \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (0 \quad 0 \quad 0)$$

или

$$\begin{aligned} m_{11} - a_{12}m_{21} - a_{10} &= 0, \\ m_{12} - a_{12}m_{22} - b_{11} &= 0, \\ m_{13} - a_{12}m_{23} &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Таким образом, КМНК-оценки структурных параметров первого уравнения системы (1) равны

$$\hat{a}_{12} = \frac{\hat{m}_{13}}{\hat{m}_{23}} = \frac{11,923}{1,440} = 8,278,$$

$$\hat{b}_{11} = \hat{m}_{12} - \hat{a}_{12}\hat{m}_{22} = 5,908 - 8,278 \cdot 0,295 = 3,462, \quad (8)$$

$$\hat{a}_{10} = \hat{m}_{11} - \hat{a}_{12}\hat{m}_{21} = 20,358 - 8,278 \cdot 1,171 = 10,667,$$

где использованы МНК-оценки параметров приведенной формы, полученные по данным табл. 1:

$$\begin{aligned}\hat{Y}_1 &= \hat{m}_{11} + \hat{m}_{12}X_1 + \hat{m}_{13}X_2 = 20,358 + 5,908 \cdot X_1 + 11,923 \cdot X_2, \quad R^2 = 0,867, \\ &\quad (5,031) \quad (1,812) \quad (3,274) \\ \hat{Y}_2 &= \hat{m}_{21} + \hat{m}_{22}X_1 + \hat{m}_{23}X_2 = 1,171 + 0,295 \cdot X_1 + 1,440 \cdot X_2, \quad R^2 = 0,944, \\ &\quad (0,283) \quad (0,102) \quad (0,184) \\ \hat{Y}_3 &= \hat{m}_{31} + \hat{m}_{32}X_1 + \hat{m}_{33}X_2 = 7,716 + 1,709 \cdot X_1 + 12,005 \cdot X_2, \quad R^2 = 0,953. \\ &\quad (2,013) \quad (0,725) \quad (0,184)\end{aligned}\quad (9)$$

Двухшаговый метод наименьших квадратов. В ДМНК, на первом шаге, оцениваются эндогенные регрессоры уравнения по всем предопределенным переменным модели. В первом уравнении структурной формы

$$Y_1 = a_{10} + a_{12}Y_2 + b_{11}X_1 + v_1, \quad (10)$$

– это Y_2 (количество работающих). Оценка этой переменной выполняется в рамках второго уравнения приведенной формы (9). На втором шаге ДМНК, по оценкам $\hat{Y}_2$ и экзогенной переменной X_1 (приведенных в табл. 2), находятся ДМНК-оценки параметров первого уравнения структурной формы:

$$Y_1 = a_{10} + a_{12}\hat{Y}_2 + b_{11}X_1 + \varepsilon_1.$$

Таблица 2
Результаты первого шага ДМНК

t	Y_1	X_1	$\hat{Y}_2$	t	Y_1	X_1	$\hat{Y}_2$
1	46	2,3	3,291	7	57	3,4	3,760
2	48	2,4	3,464	8	59	3,4	4,048
3	49	3,2	3,701	9	59	3,5	4,365
4	52	3,4	3,616	10	60	3,5	4,509
5	52	3,4	3,760	11	61	3,6	4,683
6	54	3,4	3,904				

Из результатов оценивания следует, что КМНК-оценки параметров первого (точно идентифицируемого) уравнения структурной формы СОУ (8) совпадают с его ДМНК-оценками:

$$\begin{aligned}\hat{Y}_1 &= 10,667 + 3,462 \cdot X_1 + 8,278 \cdot Y_2, \\ &\quad (6,097) \quad (2,249) \quad (2,273) \\ R^2 &= 0,867.\end{aligned}\quad (11)$$

Метод инструментальных переменных (МИП). Для решения проблемы эндогенности используется метод инструментальных переменных, в котором в качестве инструментов, замещающих регрессоры, коррелирующие с возмущением, используются переменные (инструменты), сильно коррелирующие с данным

регрессором, и не коррелирующие с возмущением модели. МИП-оценка параметров модели множественной линейной регрессии имеет вид [7]:

$$\hat{\beta}_{\text{МИП}} = (Z^T X)^{-1} Z^T Y, \quad (12)$$

где Z – матрица инструментальных переменных. Задача выбора инструментальных переменных не всегда решается просто. Одним из способов является замена переменной на её оценку, полученную в рамках другой модели. Применительно к первому уравнению структурной формы СОУ (1), заменим переменную Y_2 её оценкой, полученной в рамках модели приведенной формы (9). Элементы матриц регрессоров и инструментальных переменных приведены в табл. 3.

Таблица 3
Матрицы МИП-оценки

Матрица регрессоров X			Матрица инструментальных переменных Z		
I_n	Y_2	X_1	I_n	$\hat{Y}_2$	X_1
1	3,4	2,3	1	3,291	2,3
1	3,4	2,4	1	3,464	2,4
1	3,5	3,2	1	3,701	3,2
1	3,7	3,4	1	3,616	3,4
1	3,8	3,4	1	3,760	3,4
1	3,8	3,4	1	3,904	3,4
1	3,9	3,4	1	3,760	3,4
1	4,0	3,4	1	4,048	3,4
1	4,3	3,5	1	4,365	3,5
1	4,5	3,5	1	4,509	3,5
1	4,8	3,6	1	4,683	3,6

Результаты, полученные по формуле (12), совпадают с ДМНК-оценками. Таким образом, ДМНК является методом инструментальных переменных, нацеленным на корректировку эндогенности регрессоров модели.

Метод наименьших квадратов с ограничениями на параметры. Оценим параметры первого уравнения структурной формы (1) в рамках МНК с ограничениями на пара-

метры. МНК-оценка параметров линейной модели множественной регрессии

$$Y = X\beta + \varepsilon \quad (13)$$

с линейными ограничениями общего вида

$$H_0 : H\beta = r, \quad (14)$$

где Y – вектор значений эндогенной переменной ($n \times 1$), X – матрица регрессоров ($n \times k$), β – вектор параметров ($k \times 1$), r – вектор констант ограничений ($q \times 1$), H – матрица ограничений ($q \times k$), $\text{rank}(H) = q$, $q \leq k$, определяется по формуле [8, 9]

$$\hat{\beta}_R = \hat{\beta}_{UR} + b, \quad (15)$$

где $\hat{\beta}_{UR}$ – МНК-оценка параметров без учёта ограничений (*unrestricted*)

$$\hat{\beta}_{UR} = (X^T X)^{-1} X^T Y, \quad (16)$$

$\hat{\beta}_R$ – МНК-оценка параметров при наличии ограничений (*restricted*), b – коэффициент корректировки:

$$b = (X^T X)^{-1} H^T (H(X^T X)^{-1} H^T)^{-1} (r - H\hat{\beta}_{UR}) = \\ = (X^T X)^{-1} H^T V (r - H\hat{\beta}_{UR}), \quad (17)$$

где

$$V = [H(X^T X)^{-1} H^T]^{-1}. \quad (18)$$

Оценка $\hat{\beta}_R$ параметров модели (13), (14) является решением задачи на условный экстремум:

$$e^T e = (Y - X\hat{\beta}_R)^T (Y - X\hat{\beta}_R) \rightarrow \min, \quad H\hat{\beta}_R = r,$$

где e – вектор остатков в модели с ограничениями на параметры. Оценим первое уравнение модели (1) МНК без учета ограничений:

$$Y_{1t} = 10,788 + 3,518 \cdot X_{1t} + 8,201 \cdot Y_{2t} + e_{1t}, \\ (5,406) \quad (1,970) \quad (1,934) \quad (1,937)$$

$$R^2 = 0,891.$$

МНК-оценки параметров:

$$\hat{\beta}_{UR} = (a_{10}; \quad b_{11}; \quad a_{12})^T = \\ = (10,788; \quad 3,518; \quad 8,201)^T$$

– смещенные и несостоятельные, в силу проблемы эндогенности. Для вычисления корректировочного члена (15), в качестве ограничений на параметры используем взаимосвязь (7) между структурными и приведенными параметрами, которую запишем в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & m_{21} \\ 0 & 1 & m_{22} \\ 0 & 0 & m_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{10} \\ b_{11} \\ a_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} \\ m_{12} \\ m_{13} \end{pmatrix}.$$

При формировании матрицы ограничений H и вектора констант ограничений r воспользуемся МНК-оценками параметров приведенной формы (9):

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \hat{m}_{21} \\ 0 & 1 & \hat{m}_{22} \\ 0 & 0 & \hat{m}_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1,171 \\ 0 & 1 & 0,295 \\ 0 & 0 & 1,440 \end{pmatrix}, \\ r = \begin{pmatrix} \hat{m}_{11} \\ \hat{m}_{12} \\ \hat{m}_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20,358 \\ 5,908 \\ 11,923 \end{pmatrix}.$$

В табл. 4 приведены значения матриц, используемых в формулах (15)–(18) в порядке, удобном для их вычисления.

Таблица 4

Вспомогательные вычисления

$X^T X$			$(X^T X)^{-1}$		
11	35,5	43,1	7,790	–0,491	–1,560
35,5	116,55	140,54	–0,491	1,034	–0,726
43,1	140,54	170,93	–1,560	–0,726	0,997
$(X^T X)^{-1} H^T$			$H(X^T X)^{-1} H^T$		
5,963	–0,952	–2,248	5,502	–1,458	–0,567
–1,341	0,819	–1,046	–1,458	0,692	–0,622
–0,394	–0,432	1,435	–0,567	–0,622	2,068
$V = (H(X^T X)^{-1} H^T)^{-1}$			$(X^T X)^{-1} H^T V$		
11	35,500	13,700	1	–1,421E–14	–0,813
35,500	116,550	44,810	0	1	–0,205
13,700	44,810	17,726	3,55E–15	0	0,694

Значения вектора оценок параметров без ограничений, ограничений в неявном виде, коэффициента корректировки, оценок параметров при наличии ограничений приведены в табл. 5.

Таблица 5
Вычисление оценок параметров с ограничениями

$\hat{\beta}_{UR}$	$H\beta_{UR}$	$r - H\hat{\beta}_{UR}$	b	$\hat{\beta}_R$
1	2	3	4	5
10,788	20,388	-0,030	-0,121	10,667
3,518	5,941	-0,033	-0,056	3,462
8,201	11,812	0,111	0,077	8,278

Сравнение результатов, приведенных в пятом столбце табл. 5, и оценок параметров модели (11) показывает, что оценки параметров структурного уравнения СОУ в рамках МНК с ограничениями (5) на структурные параметры совпадают с ДМНК-оценками, решающими проблему эндогенности.

Список литературы

1. Green W.H. *Econometric Analysis* (7th ed.) / W.H. Green. – N.Y., 2012. – 1024 p.
2. Эконометрика: учебник / И.И. Елисеева, С.В. Курешева, Т.В. Костеева и др.; под ред. И.И. Елисеевой. – 2-е изд. – М.: Финансы и статистика, 2008. – 576 с.
3. Kleiber C., Zeileis A. *Applied Econometrics with R*. Springer-Verlag. – N.Y., 2008. – 222 p.
4. Талызин В.А. Оценивание параметров системы взаимосвязанных уравнений с ограничениями на структурные параметры в задачах эконометрики / В.А. Талызин, А.П. Кирпичников, И.Н. Аглиуллин // Вестник технологического университета. – 2015. – Т. 18, № 16. – С. 246–248.
5. Бабешко Л.О. Основы эконометрического моделирования / Л.О. Бабешко. – М.: ЛЕНАНД, 2016. – 432 с.
6. Бабешко Л.О. Модель равновесного рынка: точность оценок параметров СОУ в рамках косвенного метода наименьших квадратов / Л.О. Бабешко // Управление риском. – 2015. – № 1 (65). – С. 58–66.
7. Эббес П. Инструментальные переменные и эндогенность: нетехнический обзор / П. Эббес // Квантиль. – 2007. – № 2. – С. 3–20.
8. Магнус Я.Р., Катышев П.К., Пересецкий А.А., Головань С.В. Сборник задач к начальному курсу эконометрики. – М.: Дело, 2007. – 368 с.
9. Бабешко Л.О. Эконометрическое прогнозирование по разнородной информации / Л.О. Бабешко. – М.: Вега-Инфо, 2016. – 232 с.