УДК 330.35:517.977

ВАРИАНТЫ ПОСТАНОВКИ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ ОБОБЩЕННОЙ ПОЛЕЗНОСТИ ПОТРЕБЛЕНИЯ В МОДЕЛИ СОЛОУ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ РАЗЛИЧНОГО РОДА

[1]Меерсон А.Ю., [2]Черняев А.П.

[1]Российский экономический университет имени Г.В. Плеханова, Москва, e-mail: allameerson@yandex.ru;

[2]Московский физико-технический институт (государственный университет), Москва, e-mail: chernyaev49@yandex.ru

В настоящей статье рассмотрены всевозможные постановки оптимизационных задач с ограничениями различного рода для макромодели экономического роста Солоу, где в качестве одной из определяемых переменных выступает фондовооруженность. Сначала для этой модели ставится простейшая вариационная задача с закрепленными концами, в которой находится максимум вариационного функционала, выражающего интегральную дисконтированную полезность среднедушевого потребления, при наличии дифференциального уравнения связи. Это уравнение связи описывает поведение фондовооруженности для производственной функции произвольного характера, значительно более общего, чем производственная функция Кобба – Дугласа. Затем ставятся, решаются и исследуются обобщения этой простейшей задачи, то есть задачи с ограничениями различного рода, а именно: задача с ограничениями на среднедушевое потребление, задача с фазовым ограничением на фондовооруженность. Следует заметить, что постановки задач оптимального управления для макромодели Солоу сложнее, чем постановки аналогичных задач, рассмотренных ранее, ибо дифференциальное уравнение связи в модели Солоу в случае производственной функции произвольного характера не решается в квадратурах. Но, несмотря на это, дифференциальное уравнение Эйлера, являющееся необходимым условием экстремума, в настоящей работе проинтегрировано в квадратурах, что является серьезным достижением настоящей статьи. Благодаря этому исследованы экономические модели зависимости народнохозяйственной производительности труда от фондовооруженности. Достоверность представленных результатов основана на обобщении математических моделей экономического роста, широко представленных в научной литературе. Вывод об определяющей роли среднедушевого потребления может быть использован в моделях математической экономики и при разработке экономической политики.

Ключевые слова: интегральная дисконтированная полезность потребления, уравнение связи, вариационный функционал, ограничения на потребление, фазовые ограничения

PRODUCTION OPTIMIZATION PROBLEMS GENERALIZED UTILITY OF CONSUMPTION IN THE SOLOW MODEL WITH CONSTRAINTS OF VARIOUS KINDS

[1]Meerson A.Yu., [2]Chernyaev A.P.

[1]Russian Economic University named after G.V. Plekhanov, Moscow, e-mail: allameerson@yandex.ru;

[2]Moscow Institute of Physics and Technology (State University), Moscow, e-mail: chernyaev49@yandex.ru

In this article we consider all kinds of optimization problems with various kinds of constraints for the macro model of economic growth Solow, where as one of the defined variables is the capital intensity. First, for this model, the simplest variational problem with fixed ends is posed, in which the maximum of the variational functional is found, expressing the integral discounted utility of the average per capita consumption, in the presence of a differential coupling equation. This coupling equation describes the behavior of the capital intensity for a production function of arbitrary character, much more General than the Cobb-Douglas production function. Then, generalizations of this simple problem are set, solved and studied, that is, the problems with restrictions of various kinds, namely: the problem with restrictions on per capita consumption and the problem with phase restriction on capital intensity. It should be noted that the formulation of optimal control problems for the Solow macromodel is more complicated than the formulation of similar problems considered earlier, because the differential equation of the coupling in the Solow model in the case of the production function of an arbitrary nature is not solved in quadratures. But despite this, the Euler differential equation, which is a necessary condition of the extremum, is integrated in quadratures in this paper, which is a major achievement of this paper. Due to this, the economic models of dependence of national economic productivity of the capital intensity. The reliability of the presented results is based on the generalization of mathematical models of economic growth, widely represented in the scientific literature. The conclusion about the determining role of per capita consumption can be used in mathematical models of Economics and in the development of economic policy.

Keywords: integrated discounted utility of consumption, equation context, the variational functional, the limitation

Популярность модели экономического роста Солоу [1, 2] очень высока с самого момента возникновения. Со временем она стала классической в математической экономике [3–5]. С ней сравнивали более поздние макроэкономические модели [6]. Однако в своих работах Солоу, во-первых основывался на производственной функции Кобба – Дугласа [1, 2], а во-вторых, не написал дифференциального уравне-

ния, описывающего поведение фондовооруженности, для производственной функции более общего характера, которое появилось позже у других авторов [3–5]. Кроме этого, она завоевала популярность и в классической математике [7–9], как в научной, так и учебной литературе. Цель настоящей работы: поставить и решить задачу максимизации интегральной дисконтированной полезности потребления при наличии уравнения связи – дифференциального уравнения, описывающего поведение фондовооруженности, для производственной функции более общего характера, чем производственная функци. яи Кобба – Дугласа.

Постановки оптимизационных задач для уравнения Солоу

Дифференциальное уравнение модели экономического роста Солоу с переменными коэффициентами, которые получены на основании производственной функции произвольного характера [3], имеет вид

$$\frac{dk}{dt} = -\lambda k + \rho(1-a)f(k)\,,\ t \in (t_0, t_1). \quad (1)$$

Здесь t – непрерывное время, измеряющееся в годах, t_0 – начальный момент, а t_1 – конечный; $k = k(t)$ – фондовооруженность [3, с. 40]; $\lambda = \mu + \nu$, где $\mu \in (0,1)$ – доля выбывших за год основных производственных фондов, а $\nu \in (-1,1)$ – годовой темп прироста числа занятых; $a \in (0,1)$ – коэффициент прямых затрат (доля промежуточного продукта в валовом общественном продукте); $\rho \in (0,1)$ – норма накопления (доля валовых инвестиций в валовом внутреннем продукте); $x = f(k)$ – народнохозяйственная производительность труда; а $c = c(t)$ – среднедушевое потребление [3, с. 39–41].

Уравнение для модели Солоу, основанное на производственной функции Кобба – Дугласа является уравнением Бернулли, и поэтому интегрируется в квадратурах [7–9]. Мы в настоящей работе для общности отвлекаемся от производственной функции Кобба – Дугласа и, поскольку уравнение (1) выведено в более общих предположениях, отмечаем, что уравнение (1) в квадратурах не интегрируется [10].

На основании статистических исследований можно сделать вывод, что зависимость народнохозяйственной производительности труда $x = f(k)$ от фондовооруженности $k = k(t)$ описывается производственной функцией Кобба – Дугласа лишь приближенно. Поэтому исследуются модели, в которых присутствует зависимость народнохозяйственной производительности труда от фондовооруженности произвольного характера. Это актуально, так как оптимальная фондовооруженность инвестиционно привлекательна.

Зададим начальное и конечное граничные условия

$$k(t_0) = k_0 \geq 0, \quad (2)$$

$$k(t_1) = k_1 \geq 0 \quad (3)$$

и ставим задачу оптимизации: найти и такое среднедушевое потребление, которое максимизирует интегральную дисконтированную полезность среднедушевого потребления

$$\int_{t_0}^{t_1} u\big(c(t)\big)\exp(-\delta t)dt \Rightarrow \max\,, \quad (4)$$

где u – функция полезности, на свойствах которой мы остановимся в следующем пункте, а δ – коэффициент дисконтирования будущей полезности [3, с. 51, 10, 11]. При этом на среднедушевое потребление можно наложить одно из ограничений

$$0 < \underline{c} \leq c(t) < +\infty, \quad (5)$$

$$0 < \underline{c} \leq c(t) \leq \overline{c} < +\infty. \quad (6)$$

В (4) и (5) $\underline{c}$ – среднедушевой прожиточный минимум, а $\overline{c}$ – ограничение сверху. Можно наложить еще одно естественное фазовое ограничение на фондовооруженность

$$k(t) \geq \text{const} \geq 0. \quad (7)$$

Остановимся, на терминологии. Задачу (1), (2), (3), (4) назовем простой вариационной задачей; задачу (1), (2), (3), (4), (5) – задачей Понтрягина, так же как и задачу (1), (2), (3), (4), (6); задачу (1), (2), (3), (4), (7) назовем вариационной задачей с фазовым ограничением; задачу (1), (2), (3), (4), (5), (7) – задачей Дубовицкого – Милютина [12], так же как и задачу (1). (2), (3), (4), (6), (7).

Во всех сформулированных задачах присутствуют уравнение (1) и граничные условия (2), (3). Это неожиданно, поскольку (1) – обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка и решение его полностью определяется постановкой задачи Коши, то есть начальным или граничным условием, что в данном случае одно и то же, (2). Однако это справедливо, если коэффициенты правой части уравнения (1) известны. В нашем же случае коэффициенты правой части уравнения (1) неизвестны и определяются в ходе рассматриваемой оптимизационной постановки.

Свойства функции полезности

Во всех сформулированных задачах присутствует условие (4). Аналогично [10–12], предполагаем, что полезность среднедушевого потребления характеризует постоянное отвращение к риску по Эрроу – Пратту:

$$\alpha = -\frac{u''(c)c}{u'(c)} \geq 0\,. \tag{8}$$

Экономический смысл (8) становится ясным, если ввести обозначение

$$g(c) = u'(c)\,, \tag{9}$$

где $g(c)$ – предельная полезность среднедушевого потребления [11]. С учетом (8) и (9)

$$g'(c) = u''(c)\,,$$

$$E_c(g) = \frac{g'(c)}{g(c)/c} = \frac{u''(c)c}{u'(c)} = -\alpha. \tag{10}$$

Здесь $E_c(g)$ – эластичность изменения переменной g по переменной c. Мы предполагаем, что $g(c)$ – функция монотонно невозрастающая. Значит, справедливо неравенство $\alpha \geq 0$. Противоположное предположение возрастания $g(c)$, очевидно, связано с риском. Поэтому случай, когда $g(c)$ не возрастает, естественно назвать отвращением к риску.

Решением дифференциального уравнения (10) является функция [11]

$$u'(c) = g(c) = \gamma c^{-\alpha}, \gamma = \text{const}, \tag{11}$$

или

$$u(c) = \begin{cases} \dfrac{\gamma c^{1-\alpha}}{1-\alpha} + \chi, \ \alpha \neq 1; \\ \gamma \ln c + \chi, \ \alpha = 1; \end{cases} \gamma = \text{const} > 0, \chi = \text{const}. \tag{12}$$

Алгоритм решения простейшей вариационной задачи, основанный на необходимом условии

Для среднедушевого потребления имеется выражение [3, с. 41]

$$c = c(t) = (1-\rho)(1-a)x = (1-\rho)(1-a)f(k). \tag{13}$$

На основании (1) и (13) будем иметь

$$\frac{dkc}{dt} = -\lambda k + \frac{\rho}{1-\rho}, \rho \neq 1. \tag{14}$$

Выражая из (14) среднедушевое потребление, получим

$$c = c(t) = \frac{1-\rho}{\rho}\left[\frac{dk}{dt} + \lambda k\right], \rho \neq 0, \rho \neq 1. \tag{15}$$

Необходимым условием экстремума в сформулированной нами в настоящей работе простейшей вариационной задаче является справедливость уравнения Эйлера [11]

$$u'(c(t))\frac{1-\rho}{\rho}\lambda e^{-\delta t} - \frac{d}{dt}[u'(c(t))\frac{1-\rho}{\rho}e^{-\delta t}] = 0,$$

$$\rho \neq 0, \rho \neq 1; \tag{16}$$

которое с учетом (9) может быть записано в виде

$$g(c(t))\frac{1-\rho}{\rho}\lambda e^{-\delta t} - \frac{d}{dt}[g(c(t))\frac{1-\rho}{\rho}e^{-\delta t}] = 0,$$

$$\rho \neq 0, \rho \neq 1. \tag{17}$$

Подставляя (15) в (16) или (17), можно заключить, что полученное обыкновенное дифференциальное уравнение относительно неизвестной фондовооруженности $k = k(t)$ будет иметь второй порядок. Поэтому, для однозначного отыскания фондовооруженности нужны оба граничные условия, как начальное (2), так и конечное (3). После того, как будет найдена искомая фондовооруженность $k(t)$, мы из (15) находим и среднедушевое потребление $c(t)$.

Интегрирование уравнения Эйлера

На основании описания алгоритма простейшей вариационной задачи становится ясно, что граничные условия (2) и (3) относятся не к уравнению (1), а к уравнению Эйлера (16) или (17). На первый взгляд, неизвестной функцией в уравнении Эйлера (16) является среднедушевое потребление $c = c(t)$, но в силу выражения этого среднедушевого потребления через фондовооруженность $k = k(t)$ (15), это выражение

получено на основании (1), неизвестной функцией в (16) будет уже фондовооруженность. Причем относительно среднедушевого потребления $c = c(t)$ уравнение (16) является уравнением первого порядка, а относительно фондовооруженности $k = k(t)$ – второго.

Введением обозначения

$$w = g(c(t))\frac{1-\rho}{\rho}e^{-\delta t}, \qquad (18)$$

уравнение Эйлера (17) упрощается

$$\frac{dw}{dt} = \lambda w. \qquad (19)$$

Предполагая в (19) $w \neq 0$, разделив на w обе части (19) и интегрируя полученное, имеем

$$\ln|w| = \int_{t_0}^{t} \lambda(s)ds + \text{const},$$

или, что то же самое,

$$w = C_0 \exp\left\{\int_{t_0}^{t} \lambda(s)ds\right\}, \; C_0 = \text{const}. \qquad (20)$$

Принимая во внимание (18), из (20) получим

$$g(c(t))\frac{1-\rho}{\rho}e^{-\delta t} = C_0 \exp\left\{\int_{t_0}^{t} \lambda(s)ds\right\}.$$

Выражая из последнего равенства предельную полезность среднедушевого потребления, будем иметь

$$g(c(t)) = C_0 \frac{\rho}{1-\rho}\exp\left\{\delta t + \int_{t_0}^{t} \lambda(s)ds\right\}. \qquad (21)$$

Взяв обратную функцию от предельной полезности среднедушевого потребления, определим из (21) само среднедушевое потребление

$$c(t) = g^{-1}\left(C_0 \frac{\rho}{1-\rho}\exp\left\{\delta t + \int_{t_0}^{t} \lambda(s)ds\right\}\right). \qquad (22)$$

Эквивалентное выражение для среднедушевого потребления может быть получено при помощи разрешения уравнения (11)

$$c(t) = \frac{\gamma^{\frac{1}{\alpha}}}{g(c(t))^{\frac{1}{\alpha}}}, \qquad (23)$$

если в него подставить (21).

Если теперь (22) или (23) при (21) подставить в (15), мы получаем дифференциальное уравнение первого порядка, где неизвестной функцией будет уже фондовооруженность.

Возможные переключения при использовании решений рассматриваемых задач

При рассмотрении любой рассматриваемой в настоящей работе оптимизационной экономической задачи целесообразно использовать следующий подход: как начальное приближение рассмотреть простейшую вариационную задачу, а найдя ее, решение проверить, удовлетворяет ли оно дополнительным условиям (5), (6) и (7). Это всегда можно сделать, так как эти условия являются неравенствами. Если случится, что найденное решение простейшей вариационной задачи этим дополнительным условиям удовлетворяет, то рассматриваемая задача решена.

Однако, полученное решение простейшей вариационной задачи может выйти за рамки какого-нибудь из неравенств (5), (6), (7). Поскольку, предполагается, что условие (2) задано так, что в некоторой малой правой окрестности начального момента времени нужные условия удовлетворяются, то целесообразно несколько сузить рассматриваемый интервал времени, то есть уменьшить t_1. Далее, в зависимости от характера поставленной задачи, можно попытаться, уже при новом граничном условии, роль которого будет играть уменьшенное t_1, изменить начальные условия так, чтобы решение поставленной задачи на некотором более значительном временном промежутке удовлетворяло нужному из неравенств. Те значения времени, в которых мы изменяем начальные условия, мы и назовем моментами переключения рассматриваемого оптимизационного экономического процесса.

Заключение

В настоящей работе наиболее подробно рассмотрена простейшая вариационная постановка оптимизационной задачи в модели роста Солоу. Однако в результате проведенных исследований получены возможности и более сложных постановок задач оптимального управления, а именно: задачи Понтрягина и задачи Дубовицкого – Милютина.

Роль управления во всех рассмотренных в настоящей работе оптимизационных задачах играет среднедушевое потребление. В достаточно общей постановке проинтегрировано уравнение Эйлера. Можно также рассмотреть оптимизационные задачи в [13–15]. В настоящей работе изучены лишь необходимые условия оптимизации. Достаточные условия на основании (8) полно исследованы в [11].

Список литературы

1. Solow R.M. A Contribution to the Theory of Economic Growth // The Quarterly Journal of Economics. 1956. February Vol. 70. № 1. P. 65–94.

2. Solow R.M. A Technical Change and the Aggregate Production Function // The Review of Economics and Statistics. 1957. August Vol. 39, № 3. P. 312–320.

3. Колемаев В.А. Математическая экономика / В.А. Колемаев. – М.: ЮНИТИ, 1998. – 240 с.

4. Курзенев В. Экономический рост / В. Курзенев, В. Матвеенко. – СПб.: Питер, 2018. – 608 с.

5. Ромер Д. Высшая макроэкономика / Д. Ромер. – М.: Издательский дом ВШЭ, 2014. – С. 26–32.

6. Красносельская Д.Х. Сравнительный анализ моделей экономического роста Р. Солоу и Мэнкью – Ромера – Уэйла (на примере Республики Башкартостан) / Д.Х. Красносельская // Креативная экономика. – 2013. – Т. 7, № 9. – С. 14–23.

7. Самаров К.Л. Экономико-математические модели / К.Л. Самаров – М.: Резольвента, 2009. – 45 с.

8. Самаров К.Л., Самарова С.С. Модель экономического роста Роберта Солоу в курсе дифференциальных уравнений // Информационно-технологический вестник. – 2014. – № 2 (02). – С. 81–84.

9. Самаров К.Л., Самарова С.С. Классические экономические модели в курсе математики // Перспективы, организационные формы и эффективность развития сотрудничества российских и зарубежных вузов: сборник трудов междунар. научно-практической конф. (г. Королев, 24–25 апреля 2014). – Королев, 2014 – С. 479–490.

10. Меерсон А.Ю., Черняев А.П. Интегральный метод исследования переходного режима в Модели Солоу // Экономика природопользования. – 2010. – № 3. – С. 105–109.

11. Меерсон А.Ю., Черняев А.П. Вариационная задача оптимизации среднедушевого потребления модели Солоу для уравнения с переменными коэффициентами, описывающего фондовооруженность // Менеджмент и бизнес–администрирование. – 2015. – № 3. – С. 127–131.

12. Дикусар В.В. Задачи оптимального распределения ресурсов на примере домашних хозяйств / В.В. Дикусар, А.Ю. Меерсон, А.П. Черняев. – М.: ВЦ РАН, 2004. – 58 с.

13. Мастяева И.Н. Методы оптимальных решений / И.Н. Мастяева, Г.И. Горемыкина, О.Н. Семенихина. – М.: Изд-во «Курс», 2016. – 384 с.

14. Новоселов А.Л., Новоселова И.Ю. Решение задачи векторной оптимизации для одного класса стохастических критериев // Информационные технологии и математические методы в экономике и управлении (ИТиММ-2016). – 2016. – С. 70–80.

15. Новоселов А.Л., Новоселова И.Ю., Желтенков А.В. Оптимизация использования альтернатив природных ресурсов в экономике региона // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Экономика. – 2016.– № 2. – С. 104–114.