УДК 004.942

ИССЛЕДОВАНИЕ ОСОБЕННОСТЕЙ СЛУЧАЙНЫХ БЛУЖДАНИЙ БРОУНОВСКОЙ ЧАСТИЦЫ В ОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ РАССЕЯНИЯ НА ОСНОВЕ СТАТИСТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Поршнев С.В., Копосов А.С.

ФГАОУ ВПО «Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина», Институт радиоэлектроники и информационных технологий – РТФ, Екатеринбург, e-mail: alexkopas@gmail.com

Обсуждаются результаты статистического моделирования методом Монте-Карло случайных блужданий броуновской частицы в ограниченной области рассеяния. Рассмотрена модель статистического распределения случайной последовательности, основанная на работах А. Эйнштейна и М. Смолуховского. Приведены аналитические формулы для функции плотности распределения, основанные на концепции мнимых источников, а также решение в общем случае для задачи аппроксимации функции распределения случайной последовательности. Рассмотрены свойства случайных блужданий в неограниченной области рассеяния. Приведен алгоритм моделирования случайных блужданий в ограниченной области рассеяния на ЭВМ и показаны результаты его работы. Показано, что зависимости среднего значения смещения и квадрата смещения от времени при больших временах блужданий асимптотически стремится к некоторому конечному значению, определяемому размером области рассеяния. Получена зависимость квадрата смещения броуновской частицы от размера области рассеяния. Сформулированы рекомендации для определения начального вектора параметров при использовании численных методов для нахождения параметров распределения.

Ключевые слова: статистическое моделирование, броуновское движение, броуновская частица, случайные блуждания, метод Монте-Карло

RESEARCH OF RANDOM WALK FEATURES OF BROWNIAN PARTICLE IN A BOUNDED SCATTERING REGION IN TERMS OF STATISTICAL MODELING

Porshnev S.V., Koposov A.S.

Ural Federal University named after the first President of Russia B.N. Yeltsin, Institute of Radioelectronics and Information Technologies – RTF, Ekaterinburg, e-mail: alexkopas@gmail.com

In this article are considered the results of statistical modeling of random walk of Brownian particle in a bounded scattering region using Monte Carlo method. We consider the model of statistical distribution of random sequence based on papers of A. Einstein and M Smoluhovsky. We review virtual source-based analytical formulas for probability density function and the general solution for problem of fitting of cumulative distribution function of random sequence. This article also considers properties of random walk in an unbounded scattering region. We show the computer modeling algorithm of random walk in a bounded scattering region and demonstrate its output. These results show that time dependences of mean displacement and square displacement in case of large random walk time are tending asymptotically to some finite value that depends on a size of a bounded scattering region. In this article is received dependence of square displacement of Brownian particle as a function of a scattering region size. As a result we have stated the recommendations for definition of initial vector of parameters when using numerical methods for finding parameters of distribution.

Keywords: statistical modeling, Brownian motion, Brownian particle, random walk, Monte Carlo method

Нормальное распределение случайной величины имеет неограниченную область рассеяния. В то же время область значений случайных величин, анализ которых приходится проводить в естествознании, технике и экономике, оказывается конечной. Как следствие, распределения данных случайных величин отличаются от идеализированной модели с неограниченной областью рассеяния. В качестве примеров физических характеристик с ограниченной областью рассеяния можно привести плотность углей, изменяющейся в диапазоне от ρ_{min} до некоторого максимального значения ρ_{max} время безотказной работы группы однотипных приборов, изменяющегося в диапазоне от некоторого минимального значения T_{min} до некоторого максимального T_{max} и т.д.

Существует два альтернативных подхода к построению математических моделей обсуждаемых случайных величин. Первый подход основан на описании распределения случайной величины с помощью усеченных функций нормального распределения [1]:

$$F'_N\left(x;\mu,\sigma,x_{\min},x_{\max}\right)=\int_{x_{\min}}^{x}\varphi'\left(\xi;\mu,\sigma,x_{\min},x_{\max}\right)d\xi,\ x\in\left[x_{\min},x_{\max}\right], \quad (1)$$

где

$$\varphi'_N\left(x;\mu,\sigma,x_{\min},x_{\max}\right)=\frac{1}{\sigma}\frac{\varphi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)}{F\left(\frac{x_{\max}-\mu}{\sigma}\right)-F\left(\frac{x_{\min}-\mu}{\sigma}\right)},$$

где $\varphi(x)$ – плотность стандартного нормального распределения $N(0, 1)$; $F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{\xi^2}{2}}d\xi$ – функция Лапласа; μ, σ – параметры исходного нормального распределения; $x_{\min} < x_{\max}$ – точки усечения.

Во втором подходе, базирующемся на работах А. Эйнштейна и М. Смолуховского по теории броуновского движения [7], модель статистического распределения случайной последовательности строится как распределение конечного состояния некоторого случайного процесса без последействия с ограниченной областью рассеяния [3]. Его плотность распределения, являющаяся линейной комбинацией плотностей распределений мнимых источников (рис. 1), описывается следующим выражением [4]:

$$f_{LIM}(x;x_0,\sigma,l)=A\left[\varphi(x;x_0,\sigma,l)+\sum_{n=0}^{\infty}\varphi^{\pm}_{2n+1}(x;x_0,\sigma,l)+\sum_{n=1}^{\infty}\varphi^{\pm}_{2n}(x;x_0,\sigma,l)\right], \quad (2)$$

где x_0 – положение центра рассеяния в системе координат с началом в центре отрезка $[x_{\min}, x_{\max}]$; s – СКО случайного процесса при отсутствии ограничения; $l = x_{\max} - x_{\min}$ – размаха области рассеяния; А – нормировочный коэффициент, определяемый из условия

$$\int_{x_{\min}}^{x_{\max}} f_{LIM}(\xi;x_0,\sigma,l)\,d\xi=1; \quad (3)$$

$$\varphi(x;x_0,\sigma,l)=\exp\left[-(x-x_0)^2/2\sigma^2\right];$$

$$\varphi^{\pm}_{2n+1}(x;x_0,\sigma,l)=\exp\left[-\left(x-x^{\pm}_{2n+1}\right)^2/2\sigma^2\right];$$

$$\varphi^{\pm}_{2n}(x;x_0,\sigma,l)=\exp\left[-\left(x-x^{\pm}_{2n}\right)^2/2\sigma^2\right],$$

где $x^{\pm}_{2n+1}, x^{\pm}_{2n}$ вычисляются по формулам:

$$x^{\pm}_{2n}=\pm 4nl+x_0,$$
$$x^{\pm}_{2n+1}=\pm(4n+2)l-x_0, \quad (4)$$

соответственно функция распределения

$$F_{LIM}(x;x_0,\sigma,l)=\int_{x_{\min}}^{x} f_{LIM}(\xi;x_0,\sigma,l)\,d\xi. \quad (5)$$

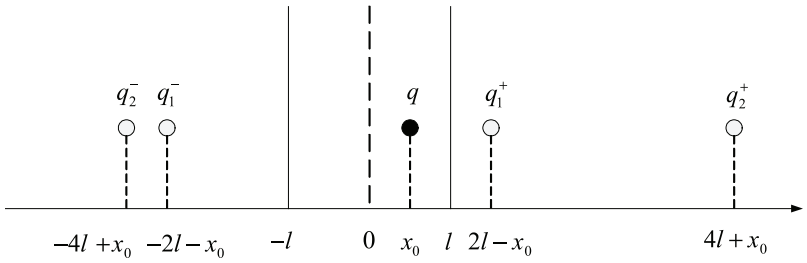


Рис. 1. К вычислению координат фиктивных источников

Результаты сравнительного анализа распределений (1), (2), проведенные в [4], показывают, что при использовании математической модели (1) для описания функции распределения случайной последовательности с ограниченной областью блуждания в зависимости от значений параметров математической модели ошибка может достигать 10%. В этой связи для аппроксимации распределений случайных величин, область значений которых из физических соображений является ограниченной, следует использовать математическую модель (2), зависящую от следующих 4-х параметров: x_0, σ, $l = x_{\max} - x_{\min}$. Кроме того, при практическом использовании (2) в список параметров модели с неизбежностью приходится вводить еще один параметр – количество мнимых источников N_f, используемых в (2), от которого также будет зависеть точность аппроксимации функции распределения. Таким образом, фактически математическая модель (2) является 5-ти параметрической.

Напомним, что существование решения задачи аппроксимации распределения случайной последовательности обеспечивается теоремой Гливенко [1], в соответствии с которой эмпирическая функция распределения $F_N(x)$

$$F_N(x)=\begin{cases}0, if\ x\le x_1,\\ \frac{k}{n}, if\ x_k\le x\le x_{k+1},\\ 1, if\ x>x_n\end{cases}$$

любой упорядоченной по возрастанию совокупности случайных величин x_i, $i=\overline{1,N}$:

$$x_1\le x_2\le\ldots\le x_k\le x_{k+1}\le\ldots\le x_N,$$

при $N\to\infty$ сходится, вообще говоря, к неизвестной истиной интегральной функции распределения $F(x,\overline{a})$, $\overline{a}$ – вектор параме-

тров. Для случайной величины с ограниченной областью рассеяния

$$F(x,\bar{a}) = F_{LIM}(x;\bar{a});$$

$$\bar{a} = (x_0, \sigma, x_{\min}, x_{\max}, N_f).$$

Традиционно вектор параметров находят как решение одной из следующих задач:

$$\bar{a} = \arg\min\left(\Phi\left(F_{LIM}(x_k,\bar{a}) - F_N(x_k)\right)\right),\ k = \overline{1,N}; \quad (6)$$

$$\bar{a} = \arg\max\left(\Phi\left(F_{LIM}(x_k,\bar{a}) - F_N(x_k)\right)\right), k = \overline{1,N}, \quad (7)$$

где Ф – тот или иной функционал, вид которого зависит от выбранного критерия близости функций $F_{LIM}(x_k,\bar{a})$ и $F_N(x_k)$. Например, для решения задачи (6) можно использовать метод максимального правдоподобия, задачи (7) – метод наименьших квадратов и т.д.

Отметим, что в подавляющем большинстве случаев решение задач (6), (7) сводится к решению некоторой, вообще говоря, нелинейной системы уравнений, которое может быть найдено только численно. При этом точность оценки вектора параметров $\bar{a}$ оказывается напрямую зависящей от удачного выбора начального приближения $\bar{a}^*$ и области, в которой осуществляется поиск возможных значений координат вектора. В этой связи разработка научно обоснованных рекомендаций по выбору начального приближения и области поиска возможных значений параметров в задаче оценки параметров функции распределения случайной величины с ограниченной областью рассеяния является актуальной.

В статье обсуждаются результаты статистического моделирования методом Монте-Карло случайных блужданий броуновской частицы в ограниченной области рассеяния, позволяющие установить связь между размерами области случайных блужданий и параметрами функции распределения.

Свойства случайных блужданий с неограниченной областью рассеяния

Предваряя обсуждения особенностей случайных блужданий в ограниченной области, напомним, следуя [5], основные свойства случайных блужданий с неограниченной областью рассеяния. В данной одномерной модели случайных блужданий частицы предполагается, что частица в начальный момент времени расположена в точке с координатой $x_0 = 0$. Далее на каждом шаге частица совершает перемещение на величину шага с вероятностью влево или с вероятностью $q = 1 - p$ вправо. Тогда вероятность нахождения частицы через n шагов в точке с координатой $x = m \cdot P_n(m)$, вычисляется по формуле

$$P_n(m) = \frac{n!}{\left(\frac{n+m}{2}\right)!\left(\frac{n-m}{2}\right)!} p^{\frac{m+n}{2}} q^{\frac{n-m}{2}}, \quad (8)$$

где $n + m$ $n - m$ − число элементарных смещений (шагов) вправо и влево соответственно. (Здесь, если n – четно, то m тоже четно, и, наоборот, если n – нечетно, то m тоже нечетно). При $p = q = \frac{1}{2}$ (8) принимает следующий вид:

$$P_n(m) = C_n^{\frac{n+m}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^2. \quad (9)$$

Соотношения (8), (9) с физической точки зрения могут быть истолкованы следующим образом [2]. Предположим, что в начальный момент времени в точке $x = 0$ имелось большое количество частиц (ансамбль частиц). Далее частицы начинают перемещаться под действием случайных толчков независимо друг от друга. Тогда (8), (9) есть доля частиц, оказавшихся на расстоянии m от начала отсчета.

При больших значениях n выражение (9) в соответствии с локальной теоремой Муавра–Лапласа аппроксимируется следующим выражением:

$$P\{x = m\} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} e^{\frac{-m^2}{2n}}, \quad (10)$$

где n – число шагов, совершенных частицей.

Из (10) видно, что при достаточно большом числе шагов распределение координат частицы, совершающей случайные блуждания, описывается нормальным законом распределения.

Зависимость координаты частицы, усредненной по ансамблю частиц, совершающих независимые перемещения, от номера шага перемещения n

$$\langle x \rangle_n = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} [x_i]_n,$$

где $i = \overline{1,N}$, N – число частиц в ансамбле для случая $x_0 = 0$ описывается выражением [6]

$$\langle x \rangle = (p - q)\, n, \quad (11)$$

для случая $x_0 \neq 0$ описывается выражением

$$\langle x \rangle = x_0 + (p - q)\, n. \quad (12)$$

Зависимость квадрата смещения частицы, усредненной по ансамблю частиц, совершающих независимые перемещения, от номера шага перемещения n

$$\left\langle x^2 \right\rangle_n = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left[x_i^2\right]_n,$$

где $i = \overline{1,N}$, N – число частиц в ансамбле, для случая $x_0 = 0$ описывается выражением [6]

$$\left\langle x^2 \right\rangle_n = 4pqn, \qquad (13)$$

для случая $x_0 \neq 0$ описывается выражением

$$\left\langle x^2 \right\rangle_n = x_0^2 + 4pqn. \qquad (14)$$

Если $p = q = \frac{1}{2}$, выражения (11)–(14) соответственно принимают следующий вид:

$$\left\langle x \right\rangle_n = 0, \qquad (15)$$

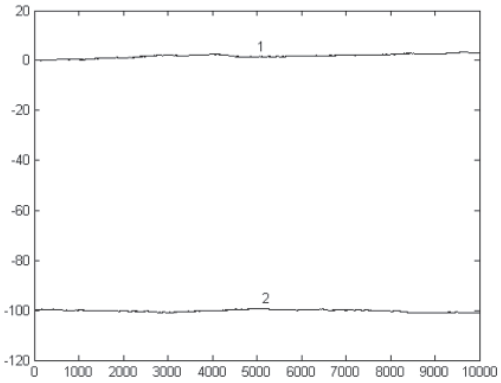
$$\left\langle x \right\rangle_n = x_0, \qquad (16)$$

$$\left\langle x^2 \right\rangle = n, \qquad (17)$$

$$\left\langle x^2 \right\rangle = x_0^2 + n. \qquad (18)$$

Из (13), (14), (17), (18) видно, что дисперсия случайного блуждания зависит линейно от числа шагов частицы, совершающей случайные блуждания, что соответствует результату, полученному А. Эйнштейном для броуновского движения, который показал [7], что дисперсия линейно зависит от времени t, что в рассматриваемом случае эквивалентно числу случайных шагов n.

Типичные результаты статистического моделирования случайного блуждания с неограниченной областью рассеяния представлены на рис. 2, 3.



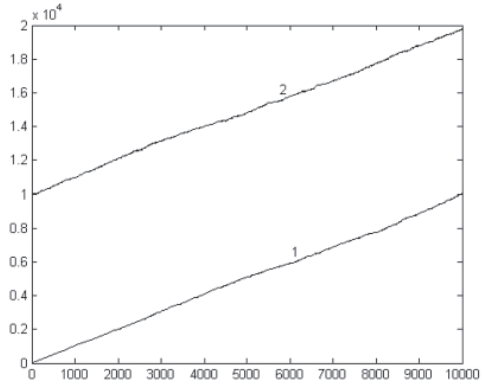


Рис. 2. Графики зависимостей $\left\langle x \right\rangle_n$ (слева), $\left\langle x^2 \right\rangle_n$ (справа) для случая $n = \overline{1,10^4}$, $N = 5\cdot10^3$: 1 – $x_0 = 0$; 2 – $x_0 = -100$

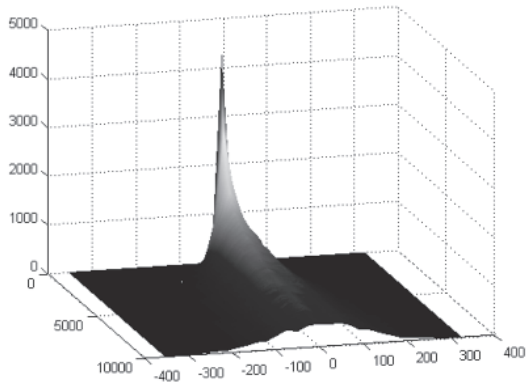


Рис. 3. Поверхность, задаваемая функцией $N\cdot P_n(m)$

Из рис. 2 видно, что результаты статистического моделирования согласуются с теоретическими зависимостями, так как для каждого из рассмотренных случаев $\left\langle x \right\rangle_n \approx x_0$, а уравнения прямых, аппроксимирующих зависимости $\left\langle x^2 \right\rangle_n$ по методу наименьших квадратов зависимости имеют вид:

$$1 - \left\langle x^2 \right\rangle_n = 0{,}979n + 75{,}5;$$

$$2 - \left\langle x^2 \right\rangle_n = 0{,}959n + 1{,}01\cdot10^4.$$

Полученные результаты, в свою очередь, свидетельствуют о достаточно высоком качестве использованного в статистическом моделировании генератора случайных чисел.

Из рис. 3 видно, что с течением времени происходит расплывание функции $N\cdot P_n(m)$ в пространстве (по переменной m). При этом ее форма (зависимость от переменной m) не меняется.

Моделирование случайных блужданий частицы в ограниченной области

Блок-схема алгоритма моделирования случайных блужданий в ограниченной области рассеяния [x_{min}, x_{max}] представлена на рис. 4.

В данном алгоритме для каждой частицы ансамбля после каждого шага Монте-Карло проводится сравнение текущей координаты частицы x_n с координатами левой и правой границ. Если координата точки на очередном шаге $x_n > x_{\max}$, то частицу следует упруго отразить от стенки, поместив ее на расстояние $x_n - x_{\max}$ слева от точки $x_{\max}$:

$$x_{\max} - (x_n - x_{\max}) = 2x_{\max} - x_n.$$

Если координата точки на очередном шаге $x_n < x_{\min}$, то частицу следует упруго отразить от стенки, поместив ее на расстояние $x_{\min} - x_n$ справа от точки $x_{\min}$:

$$x_{\min} + (x_{\min} - x) = 2x_{\min} - x.$$

После вычисления траектории блужданий каждой из частиц ансамбля, на каждом шаге Монте-Карло вычисляются $\langle x \rangle_n$, $\langle x^2 \rangle_n$.

В соответствии с описанным выше алгоритмом были проведено статистическое моделирования случайных блужданий с ограниченной областью рассеяния, цель которых состояла в выявлении функциональных зависимостей между начальной координатой частицы x_0, координатами левой и правой границ области рассеяния и зависимостями $\langle x \rangle_n$, $\langle x^2 \rangle_n$, а также их влияние на вид плотности распределения случайного блуждания.

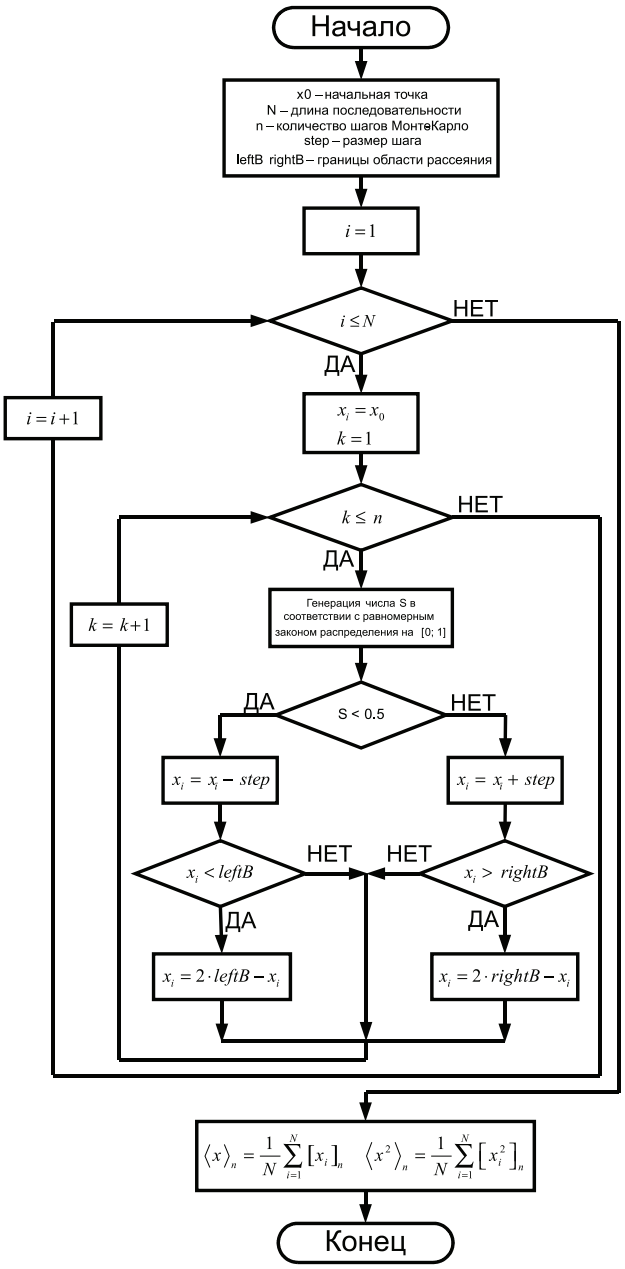
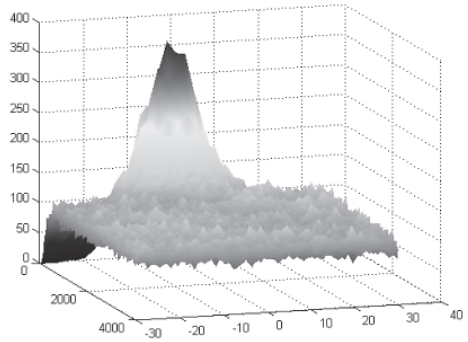


Рис. 4. Блок-схема случайного блуждания в ограниченной области

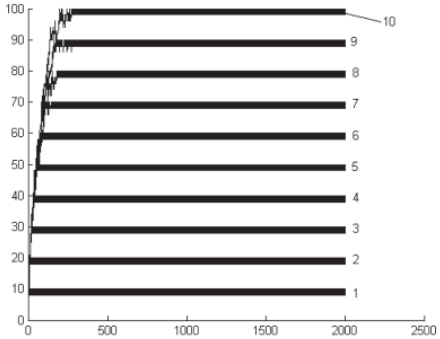
Рассмотрим результаты статистических исследований, представленные на рис. 5.

Из рис. 5 видно, что случайные блуждания в ограниченной области рассеяния имеют следующие свойства:

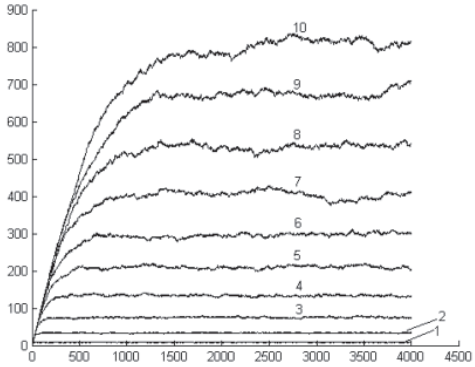
1. Для случая $x_0 = 0$ и $x_2 = -x_1$ плотность распределения при $n \to \infty$ стремится к равномерному закону распределения с центром в точке $x_0 = 0$ и областью рассеяния $2l = x_2 - x_1$ (рис. 5 а, б).



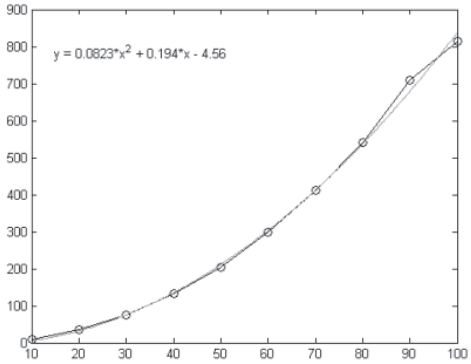
а) Поверхность, задаваемая функцией $N{\cdot}P_n(m)$: $x_0 = 0$ $x_1 = -30$ $x_2 = 30$ $l = 30$ $N = 3000$, $n = 50, 60, ..., 4000$



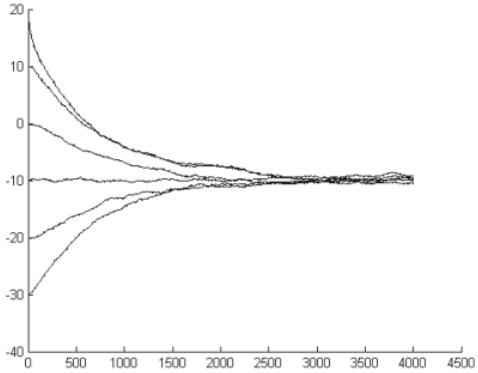
б) Зависимость размаха случайных блужданий от номера шага Монте-Карло: $x_0 = 0$, $x_2 = -x_1$, $|x_1| = |x_2| = 2l = 10, 20, ..., 100$, $N = 3000$, $n = \overline{1,2001}$



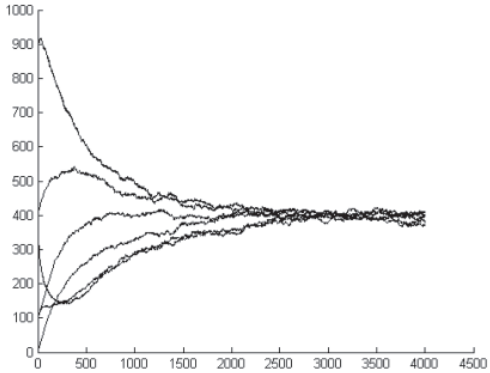
в) Зависимость $\langle x^2 \rangle_n$: $x_0 = 0$, $x_2 = -x_1$ $|x_1| = |x_2| = 2l = 10, 20, ..., 100$, $N = 3000$, $n = \overline{1,4000}$



г) Зависимость $\langle x^2 \rangle_{4000}$ от 2^{l2} $x_0 = 0$ N = 3000



д) Зависимость $\langle x \rangle_n$: $x_0 = -30, -20, ..., 20$ $x_1 = -40$, $x_2 = 30$, 2l = 70, N = 3000, $n = \overline{1,4000}$



е) Зависимость $\langle x^2 \rangle_n$: $x_0 = -30, -20, ..., 20$ $x_1 = -40$, $x_2 = 30$, 2l = 70, N = 3000, $n = \overline{1,4000}$

Рис. 5. Результаты статистических исследований

2. Для случая $x_0 = 0$ и $x_2 = -x_1$ зависимость $\langle x^2 \rangle_n$ при $n \to \infty$ стремится к некоторому предельному значению, определяемому размером области рассеяния $2l$ (рис. 5 в, г).

3. Для случая $|x_1| \neq |x_2|$ плотность распределения при $n \to \infty$ вне зависимости от координаты начальной точки x_0 стремится к равномерному закону распределения с областью рассеяния $2l = x_2 - x_1$ и средним значением $\overline{x} = x_1 + (x_2 - x_1)/2 = (x_1 + x_2)/2$ (рис. 5 д).

4. Для случая $|x_1| \neq |x_2|$ зависимость $\langle x^2 \rangle_n$ при $n \to \infty$ вне зависимости от координаты x_0 стремится к некоторому предельному значению, определяемому размером области рассеяния $2l$ (рис. 5 е).

Заключение

Существуют принципиальные отличия между случайными блужданиями с неограниченной областью рассеяния, у которых средний квадрат смещения броуновской частицы, линейно неограниченно увеличивается с течением времени, и ограниченной областями рассеяния, у которых данная величина стремится к некоторому предельному значению, зависящему от размера области случайных блужданий и независящему от точки x_0.

Результаты проведенных исследований позволяют дать следующие рекомендации для использования на практике математической модели (5)в задаче аппроксимации распределения случайной последовательности x_i, $i = 1, M$.

1. Нулевое приближении параметра x_0 нужно выбирать из отрезка $[\tilde{x}_{\min}, \tilde{x}_{\max}]$, где $\tilde{x}_{\min}, \tilde{x}_{\max}$ – минимальное и максимальное значения случайной последовательности x_i, $i = 1, M$.

2. Область поиска истинного значения параметра x_0 следует ограничить отрезком $[\tilde{x}_{\min}, \tilde{x}_{\max}]$.

3. Нулевое приближение $\tilde{\sigma}$ параметра нужно оценивать по 1 экспериментальному значению области рассеяния $2l = \tilde{x}_{\max} - \tilde{x}_{\min}$ и зависимости $\langle x^2 \rangle_n - \langle x^2 \rangle_0 = f(2l)$, полученной на основе статистического моделирования (рис. 5 г).

4. Область поиска истинного значения параметра σ следует ограничить отрезком $[0, \tilde{\sigma}]$.

Список литературы

1. Бородачев Н.А. Точность производства в машиностроении и приборостроении / Н.А. Бородачев, Р.М. Абрашитов, И.М. Веселова. – М.: Машиностроение, 1973. – 567 с.

2. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. – М.: Наука. Главное изд-во. Физ.-мат. литературы, 1988. – 488 с.

3. Поршнев С.В. Теория и алгоритмы аппроксимации эмпирических зависимостей и распределений / С.В. Поршнев, Е.В. Овечкина, В.Е. Каплан. – Екатеринбург: УрО РАН, 2006. –166 с.

4. Поршнев С.В., Копосов А.С. О выборе математических моделей распределений ограниченных случайных последовательностей / С.В. Поршнев, А.С. Копосов // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2012. – № 10(84). – Режим доступа: http://ej.kubagro.ru/2012/10/pdf/53.pdf.

5. Гулд Х., Тобочник Я. Компьютерное моделирование в физике. В 2-х тт. / Х. Гулд, Я. Тобочник. – М.: Мир, 1990. –Т. 2. – 399 с.

6. Рейф Ф. Статистическая физика. – М.: Наука, 1972. –351 с.

7. Эйнштейн А., Смолуховский М. Брауновское движение: сб. статей. – Л.: ОНТИ – Главная редакция общетехнической литературы, 1936. – 606 с.

References

1. Borodachev N.A., Abrashitov R.M., Veselova I.M. *Tochnost' proizvodstva v mashinostroenii i priborostroenii* [Accuracy of production in machinery construction and instrument making] Moscow: Mashinostroenie, 1973. 567 p.

2. Gnedenko B.V. *Kurs teorii veroyatnostey* [A course of probability theory] Moscow: Nauka. 1988. 488 p.

3. Porshnev S.V., Ovechkina E.V., Kaplan V.E. *Teoriya i algoritmy approksimazii empiricheskih zavisimostey i raspredeleniy* [Theory and algorithms of approximation of empirical dependencies and distributions] Ekaterinburg: UrO RAN, 2006. 166 p.

4. Porshnev S.V., Koposov A.S. *O vybore matematicheskih modeley raspredeleniy ogranichennyh sluchainyh posledovatel'nostey – Polytematicheskiy setevoy elektronniy nauchniy zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta* (Scientific journal KubSAU) – Krasnodar: KubSAU, 2012. no. 10(84). available at: http://ej.kubagro.ru/2012/10/pdf/53.pdf.

5. Guld H., Tobochnik Y. *Komp'yuternoe modelirovanie v fizike* [Computer modeling in physics] Moscow: Mir, 1990. Vol. 2. 399 p.

6. Reif F. *Statisticheskaya fizika* [Statistical physics] Moscow: Nauka, 1972. 351 p.

7. Einstein A., Smoluhovsky M. *Brounovskoe dvizhenie* [Brownian motion]: sb. statey. Leningrad: ONTI, 1936. 606 p.

Рецензенты:

Кубланов В.С., д.т.н., доцент, профессор кафедры радиоэлектроники информационных систем, ГАОУ ВПО «Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б.Н. Ельцина», г. Екатеринбург;

Доросинский Л.Г., д.т.н., профессор, заведующий кафедрой информационных технологий, ГАОУ ВПО «Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б.Н. Ельцина», г. Екатеринбург.

Работа поступила в редакцию 11.04.2013.